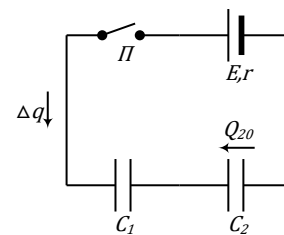


ПИСМЕНИ ИСПИТ ИЗ ЕЛЕКТРОТЕХНИКЕ

17.02.2017.

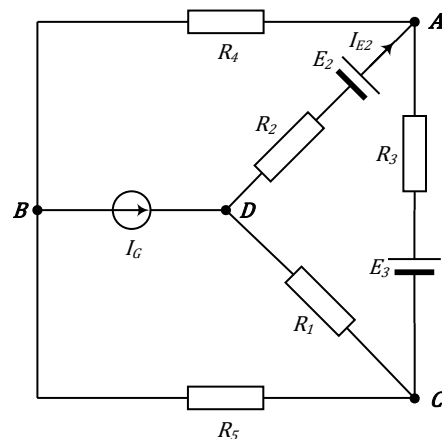
1. За коло на слици 1 познато је: $C_1 = C = 20 \text{ mF}$, $C_2 = 2C = 40 \text{ mF}$, $E = 8 \text{ V}$ и $r = 1 \Omega$.

Прекидач Π је отворен, а кондензатор C_2 је оптерећен почетном количином наелектрисања $Q_{20} = 40 \text{ mC}$ у назначеном смеру. Одредити количину наелектрисања Δq , која ће да протекне кроз коло након затварања прекидача Π . Означити референтне смерове и одредити количину наелектрисања на кондензатору C_1 и напон на кондензатору C_2 након успостављања стационарног стања. [20 поена]



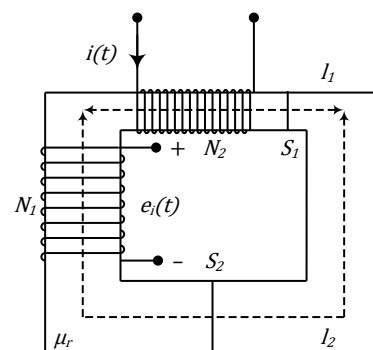
слика 1

2. За коло на слици 2 познато је: $E_2 = 20 \text{ V}$, $E_3 = 80 \text{ V}$, $I_G = 4 \text{ A}$, $R_1 = R_2 = R_4 = R_5 = R = 10 \Omega$ и $R_3 = 2R = 20 \Omega$. Применом Тевененове теореме одредити јачину струје I_{E2} и снагу напонског генератора E_2 . [20 поена]



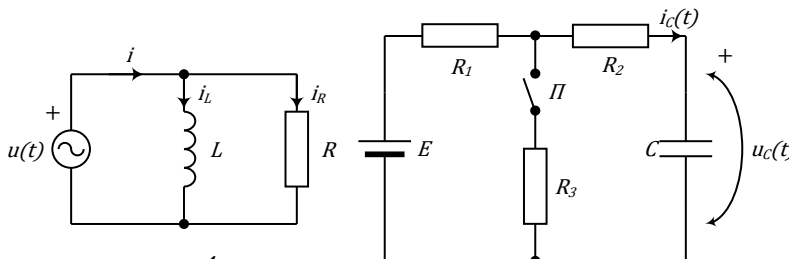
слика 2

3. За магнетно коло са два намотаја на слици 3 познато је да је језгро хомогено и да се састоји од два дела површина попречних пресека S_1 и S_2 и дужина средњих линија l_1 и l_2 . Релативна магнетна пермеабилност језгра је μ_r . Намотај са N_1 навојака има отворене крајеве, а крој намотај са N_2 навојака протиче струја интензитета $i(t) = I_m \sin(\omega t)$. Одредити изразе за:



слика 3

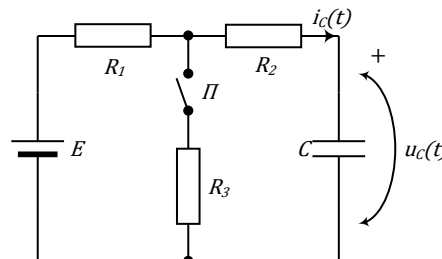
- а) Енергију магнетног поља у делу језгра дужине l_2 ; [12 поена]
 б) Максималну вредност индуковане електромоторне силе на крајевима намотаја са N_1 навојака. [8 поена]
 4. Коло на слици 4 напаја се напонам тренутне вредности $u(t) = 100 \sin(5000t + \frac{\pi}{2}) \text{ [V]}$. Вредности елемената у колу су: $R = 10 \Omega$ и $L = 2 \text{ mH}$. Одредити:



слика 4

слика 5

- в) Активну, реактивну и привидну снагу целокупног потрошача; [4 поена]
 г) Тренутне вредности струја отпорника, калема и генератора. [6 поена]
 5. За коло на слици 5 познато је: $E = 60 \text{ V}$, $R_1 = R_2 = R = 10 \Omega$, $R_3 = 2R = 20 \Omega$ и $C = 2 \mu\text{F}$. Прекидач Π је затворен и у колу је успостављено стационарно стање. У тренутку $t = 0$ прекидач се отвара. Одредити:



- а) Изразе за тренутне вредности напона и струје кондензатора након отварања прекидача Π и нацртати одговарајуће временске дијаграме; [16 поена]
 б) Минималну и максималну вредност електростатичке енергије кондензатора. [4 поена]

РЕШЕЊА ПИСМЕНОГ ИСПИТА ИЗ ЕЛЕКТРОТЕХНИКЕ

17.02.2017.

1. $C_1 = C = 20 \text{ mF}$, $C_2 = 2C = 40 \text{ mF}$, $E = 8 \text{ V}$, $r = 1 \Omega$, $Q_{20} = 40 \text{ mC}$

$$C_1 = \frac{Q_1}{U_1} \Rightarrow U_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{\Delta q}{C_1}, C_2 = \frac{Q_2}{U_2} \Rightarrow U_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{\Delta q - Q_{20}}{C_2}$$

$$U_1 + U_2 = E \Rightarrow \frac{\Delta q}{C_1} + \frac{\Delta q - Q_{20}}{C_2} = E \Rightarrow \frac{\Delta q}{C_1} + \frac{\Delta q}{C_2} - \frac{Q_{20}}{C_2} = E \Rightarrow \Delta q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = E + \frac{Q_{20}}{C_2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Delta q} = \frac{E + \frac{Q_{20}}{C_2}}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{8 \text{ V} + \frac{40 \text{ mC}}{40 \text{ mF}}}{\frac{1}{20 \text{ mF}} + \frac{1}{40 \text{ mF}}} = \boxed{120 \text{ mC}}$$

$$\boxed{Q_1} = \Delta q = \boxed{120 \text{ mC}}, \boxed{U_2} = \frac{\Delta q - Q_{20}}{C_2} = \frac{120 \text{ mC} - 40 \text{ mC}}{40 \text{ mF}} = \boxed{2 \text{ V}}$$

2. $E_2 = 20 \text{ V}$, $E_3 = 80 \text{ V}$, $I_G = 4 \text{ A}$, $R_1 = R_2 = R_4 = R_5 = R = 10 \Omega$,

$$R_3 = 2R = 20 \Omega$$

- i) $I_I = I_G = 4 \text{ A}$

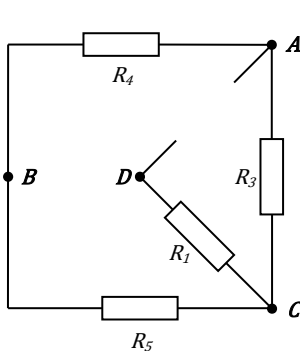
$$I_{II}(R_3 + R_4 + R_5) + I_I R_5 = -E_3 \Rightarrow I_{II} = -3 \text{ A}$$

$$\searrow I_1 = I_I = 4 \text{ A}, \uparrow I_3 = -I_{II} = 3 \text{ A}, U_{AD} = -R_1 I_1 + E_3 - R_3 I_3 = -20 \text{ V}$$

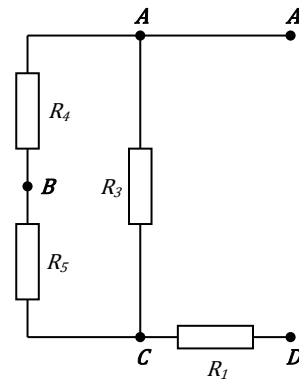
$$ii) R_{45} = R_4 + R_5 = 20 \Omega, R_{345} = \frac{R_3 \cdot R_{45}}{R_3 + R_{45}} = 10 \Omega, R_e = R_1 + R_{345} = 20 \Omega$$

$$iii) \boxed{E_T = U_{AD} = -20 \text{ V}}, \boxed{R_T = R_e = 20 \Omega}$$

$$\boxed{I_{E2}} = \frac{E_2 - E_T}{R_2 + R_T} = \frac{4}{3} \text{ A}, \boxed{P_{E2}} = E_2 I_{E2} = \frac{80}{3} \text{ W}$$



слика 2б



слика 2в

3. $S_1, S_2, l_1, l_2, \mu_r, N_1, N_2, i(t) = I_m \sin(\omega t)$

- а) **Иначин:** Закон одржања магнетног флуksа и Амперов закон

$$\text{ЗОМФ: } \Phi = B_1 S_1 = B_2 S_2 \Rightarrow B_1 = B_2 \frac{S_2}{S_1}$$

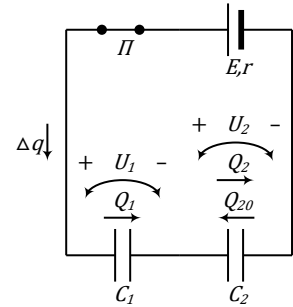
$$\text{АЗ: } H_1 l_1 + H_2 l_2 = N_2 i(t), H_1 = \frac{B_1}{\mu_0 \mu_r} = \frac{B_2}{\mu_0 \mu_r} \frac{S_2}{S_1}, H_2 = \frac{B_2}{\mu_0 \mu_r}$$

$$\frac{B_2}{\mu_0 \mu_r} \frac{S_2}{S_1} l_1 + \frac{B_2}{\mu_0 \mu_r} l_2 = N_2 i(t) \Rightarrow \frac{B_2}{\mu_0 \mu_r} \left(\frac{S_2}{S_1} l_1 + l_2 \right) = N_2 i(t) \Rightarrow$$

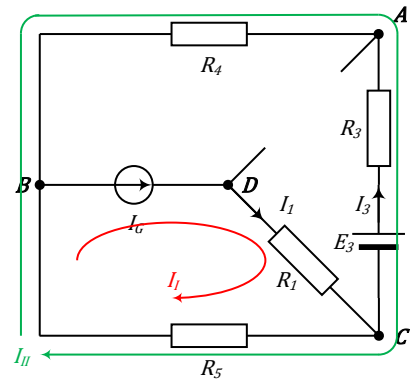
$$\frac{B_2}{\mu_0 \mu_r} \left(\frac{l_1 S_2 + l_2 S_1}{S_1} \right) = N_2 i(t) \Rightarrow B_2 = \frac{\mu_0 \mu_r N_2 S_1 i(t)}{l_1 S_2 + l_2 S_1}, H_2 = \frac{B_2}{\mu_0 \mu_r} = \frac{N_2 S_1 i(t)}{l_1 S_2 + l_2 S_1}$$

$$w_{m2} = \frac{1}{2} B_2 H_2 = \frac{\mu_0 \mu_r N_2^2 S_1^2 i^2(t)}{(l_1 S_2 + l_2 S_1)^2}, V_2 = S_2 l_2$$

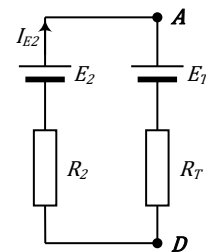
$$\boxed{W_{m2}} = w_{m2} V_2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \mu_r N_2^2 S_1^2 S_2 l_2 i^2(t)}{(l_1 S_2 + l_2 S_1)^2} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \mu_r N_2^2 S_1^2 S_2 l_2 I_m^2 \sin^2(\omega t)}{(l_1 S_2 + l_2 S_1)^2}$$



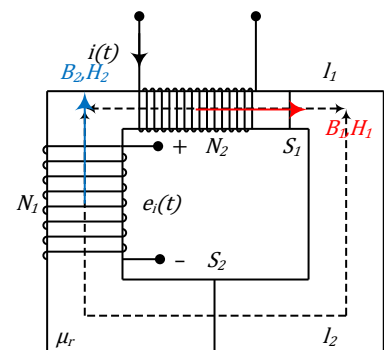
слика 1



слика 2а



слика 2г



слика 3

$$\begin{aligned} \text{б) } \Phi_{21} &= N_1 B_2 S_2 = \frac{\mu_0 \mu_r N_1 N_2 S_1 S_2 i(t)}{l_1 S_2 + l_2 S_1} = \frac{\mu_0 \mu_r N_1 N_2 S_1 S_2 I_m \sin(\omega t)}{l_1 S_2 + l_2 S_1} \\ e_i(t) &= -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -\frac{\mu_0 \mu_r N_1 N_2 S_1 S_2 I_m \omega}{l_1 S_2 + l_2 S_1} \cos(\omega t) \quad \omega = -\frac{\mu_0 \mu_r N_1 N_2 S_1 S_2 I_m \omega}{l_1 S_2 + l_2 S_1} \cos(\omega t) \\ E_{i_{\max}} &= \frac{\mu_0 \mu_r N_1 N_2 S_1 S_2 I_m \omega}{l_1 S_2 + l_2 S_1} \quad \text{кад је } \cos(\omega t) = -1 \end{aligned}$$

II начин: Кап-Хапкинсов закон

$$\begin{aligned} \text{а) } \Phi &= \frac{N_2 i(t)}{R_{m1} + R_{m2}}, R_{m1} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{l_1}{S_1}, R_{m2} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{l_2}{S_2} \\ \Phi &= \frac{N_2 i(t)}{\frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{l_1}{S_1} + \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{l_2}{S_2}} = \frac{N_2 i(t)}{\frac{1}{\mu_0 \mu_r} \left(\frac{l_1}{S_1} + \frac{l_2}{S_2} \right)} = \frac{\mu_0 \mu_r N_2 i(t)}{\frac{l_1}{S_1} + \frac{l_2}{S_2}}, \Phi = B_2 S_2 \Rightarrow B_2 = \frac{\Phi}{S_2} = \frac{\mu_0 \mu_r N_2 i(t)}{S_2 \left(\frac{l_1}{S_1} + \frac{l_2}{S_2} \right)}, H_2 = \frac{B_2}{\mu_0 \mu_r} = \frac{N_2 i(t)}{S_2 \left(\frac{l_1}{S_1} + \frac{l_2}{S_2} \right)} \\ w_{m2} &= \frac{1}{2} B_2 H_2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \mu_r N_2^2 i^2(t)}{S_2^2 \left(\frac{l_1}{S_1} + \frac{l_2}{S_2} \right)^2}, V_2 = S_2 l_2, W_{m2} = w_{m2} V_2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \mu_r N_2^2 l_2 i^2(t)}{S_2 \left(\frac{l_1}{S_1} + \frac{l_2}{S_2} \right)^2} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \mu_r N_2^2 l_2 I_m^2 \sin^2(\omega t)}{S_2 \left(\frac{l_1}{S_1} + \frac{l_2}{S_2} \right)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \Phi_{21} &= N_1 B_2 S_2 = N_1 \Phi = \frac{\mu_0 \mu_r N_1 N_2 i(t)}{\frac{l_1}{S_1} + \frac{l_2}{S_2}} = \frac{\mu_0 \mu_r N_1 N_2 I_m \sin(\omega t)}{\frac{l_1}{S_1} + \frac{l_2}{S_2}} \\ e_i(t) &= -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -\frac{\mu_0 \mu_r N_1 N_2 I_m \omega \sin(\omega t)}{\frac{l_1}{S_1} + \frac{l_2}{S_2}} \cos(\omega t) \quad \omega = -\frac{\mu_0 \mu_r N_1 N_2 I_m \omega}{\frac{l_1}{S_1} + \frac{l_2}{S_2}} \cos(\omega t) \\ E_{i_{\max}} &= \frac{\mu_0 \mu_r N_1 N_2 I_m \omega}{\frac{l_1}{S_1} + \frac{l_2}{S_2}}, \text{кад је } \cos(\omega t) = -1 \end{aligned}$$

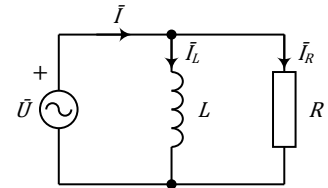
$$4. u(t) = 100 \sin\left(5000t + \frac{\pi}{2}\right) [V], R = 10 \Omega, L = 2 \text{ mH} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ H}$$

$$\text{а) } U_m = 100 \text{ V}, U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 50\sqrt{2} \text{ V}, \omega = 5000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \theta = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

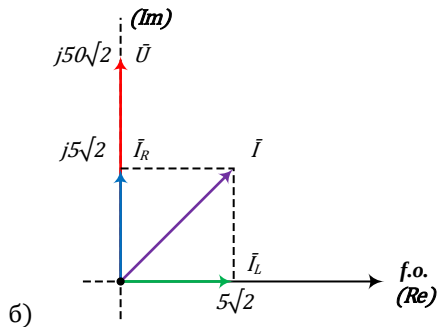
$$\bar{U} = U(\cos \theta + j \sin \theta) = j50\sqrt{2} [V], \bar{Z}_R = R = 10 [\Omega], \bar{Z}_C = jX_L = j\omega L = j10 [\Omega]$$

$$\bar{U} = \bar{U}_L = \bar{Z}_L \bar{I}_L \Rightarrow \bar{I}_L = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}_L} = \frac{j50\sqrt{2}}{j10} = 5\sqrt{2} [A], \bar{U} = \bar{U}_R = \bar{Z}_R \bar{I}_R \Rightarrow \bar{I}_R = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}_R} = \frac{j50\sqrt{2}}{10} = j5\sqrt{2} [A]$$

$$\bar{I} = \bar{I}_L + \bar{I}_R = 5\sqrt{2} + j5\sqrt{2} [A]$$



слика 4а



слика 4б

$$\text{в) } \bar{S}_G = \bar{U} \bar{I}^* = 500 + j500 [VA] \Rightarrow$$

$$P_G = P_U = 500 \text{ W}, Q_G = Q_U = 500 \text{ VAr}$$

$$S_U = \sqrt{P_U^2 + Q_U^2} = 500\sqrt{2} \text{ VA}$$

$$\text{г) } \bar{I}_R = j5\sqrt{2} [A], a = 0, b = 5\sqrt{2}, I_R = \sqrt{a^2 + b^2} = 5\sqrt{2} \text{ A}$$

$$I_{Rm} = I_R \sqrt{2} = 10 \text{ A}, \psi_R = \arctg\left(\frac{b}{a}\right) = \arctg(+\infty) = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$i_R(t) = 10 \sin\left(5000t + \frac{\pi}{2}\right) [A]$$

$$\bar{I}_L = 5\sqrt{2} [A], a = 5\sqrt{2}, b = 0, I_L = \sqrt{a^2 + b^2} = 5\sqrt{2} \text{ A}, I_{Lm} = I_L \sqrt{2} = 10 \text{ A}$$

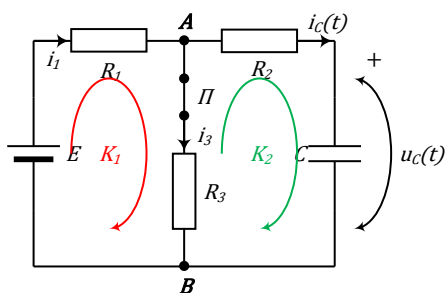
$$\psi_L = \arctg\left(\frac{b}{a}\right) = \arctg 0 = 0 \text{ rad}, i_L(t) = 10 \sin(5000t) [A]$$

$$\bar{I} = 5\sqrt{2} + j5\sqrt{2} [A], a = 5\sqrt{2}, b = 5\sqrt{2}, I_L = \sqrt{a^2 + b^2} = 10 \text{ A}, I_{Lm} = I_L \sqrt{2} = 10\sqrt{2} \text{ A}$$

$$\psi = \arctg\left(\frac{b}{a}\right) = \arctg 1 = \frac{\pi}{4} \text{ rad}, i(t) = 10\sqrt{2} \sin\left(5000t + \frac{\pi}{4}\right) [A]$$

5. $E = 60 \text{ V}, R_1 = R_2 = R = 10 \Omega, R_3 = 2R = 20 \Omega, C = 2 \mu\text{F} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ F}$

а) П затворен (СС):



слика 5а

$$u_C(t) = \text{const}, i_C(t) = 0$$

$$1K3 - A: i_1 = i_3 + \underbrace{i_C(t)}_0 \Rightarrow i_1 = i_3 = \frac{u_C(t)}{2R} \quad (1)$$

$$2K3 - K1: E - R_1 i_1 - R_3 i_3 = 0 \quad (2)$$

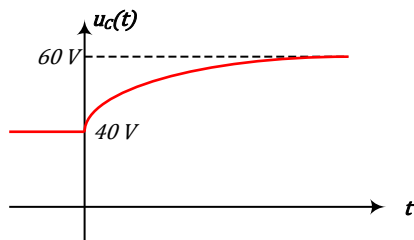
$$2K3 - K2: \underbrace{R_3 i_3 - R_2 i_C(t)}_0 - u_C(t) = 0 \Rightarrow$$

$$i_3 = \frac{u_C(t)}{R_3} = \frac{u_C(t)}{2R} \quad (3)$$

$$(1), (3) \rightarrow (2): E - R \cdot \frac{u_C(t)}{2R} - 2R \cdot \frac{u_C(t)}{2R} = 0 \Rightarrow$$

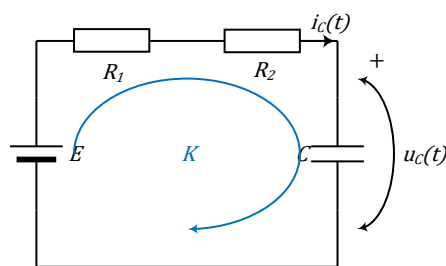
$$\frac{3}{2} u_C(t) = E \Rightarrow u_C(t) = \frac{2}{3} E = 40 \text{ V}, t \leq 0$$

$$\boxed{u_C(0) = 40 \text{ V}} \text{ почетни услов}$$



слика 5в

П отворен (ПП):



слика 5б

$$2K3 - K: E - R_1 i_C(t) - R_2 i_C(t) - u_C(t) = 0$$

$$2R i_C(t) + u_C(t) = E$$

$$2RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = E \Big| : 2RC$$

$$\frac{du_C(t)}{dt} + \underbrace{\frac{1}{2RC}}_{\alpha} u_C(t) = \underbrace{\frac{E}{2RC}}_{\beta}, u_C(t) = \frac{\beta}{\alpha} + K e^{-\alpha t}$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = E = 60 \text{ V}, K = ?, t = 0$$

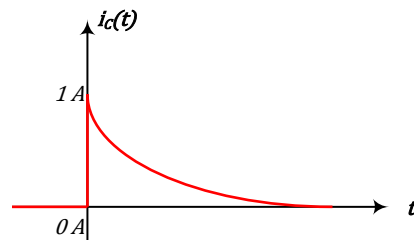
$$u_C(0) = \frac{\beta}{\alpha} + K \Rightarrow 40 = 60 + K \Rightarrow K = -20 \text{ V}$$

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{40} \cdot 10^6 \frac{1}{s}$$

$$\boxed{u_C(t) = 60 - 20 e^{-\frac{1}{40} \cdot 10^6 t} [\text{V}], t \geq 0}$$

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = 2 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{d}{dt} (60 - 20 e^{-\frac{1}{40} \cdot 10^6 t})$$

$$\boxed{i_C(t) = e^{-\frac{1}{40} \cdot 10^6 t} [\text{A}], t \geq 0}$$



слика 5г

6) $W_C(t) = \frac{1}{2} C u_C^2(t)$

$$\boxed{W_{C_{min}}(t)} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 40^2 = \boxed{16 \cdot 10^{-4} \text{ J}, t = 0}, \boxed{W_{C_{max}}(t)} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 60^2 = \boxed{36 \cdot 10^{-4} \text{ J}, t \rightarrow \infty}$$