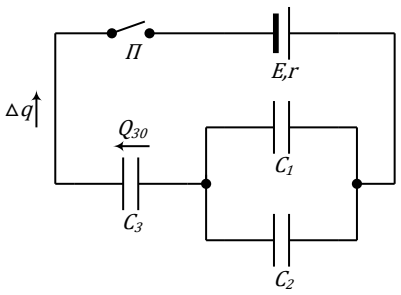
ПИСМЕНИ ИСПИТ ИЗ ЕЛЕКТРОТЕХНИКЕ 14.02.2018.

1. За коло на *слици 1* познато је: $C_1 = C_2 = C = 10\ nF$, $C_3 = 6C = 60\ nF$, $E = 10\ V$ и $r = 1\ \Omega$. Прекидач $П$ је отворен, а кондензатор C_3 је оптерећен почетном количином наелектрисања $Q_{30} = 200\ nC$ у назначеном смеру.

а) Одредити количину наелектрисања $\triangle q$, која ће да протекне кроз коло након затварања прекидача $П$. Означити референтне смерове и одредити количине наелектрисања и напоне на кондензаторима након успостављања стационарног стања. [14 поена]



слика 1

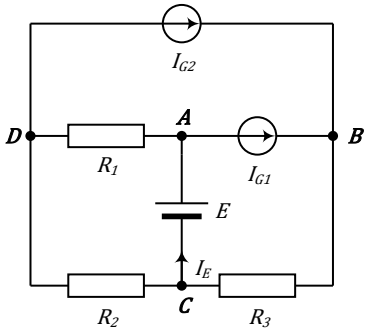
б) Ако су плоче кондензатора C_3 облика правоугаоника страница $a = 10\ cm$ и $b = 20\ cm$, а растојање између њих је $d = 1\ mm$, након затварања прекидача $П$ одредити:

- диелектричну константу (пермитивност) диеектрика између плоча кондензатора C_3; [2 поена]
- интензитет јачине електричног поља у диелектику кондензатора C_3; [2 поена]
- интензитет силе којом се привлаче плоче кондензатора C_3; [2 поена]

2. За коло на *слици 2* познато је: $E = 10\ V$, $I_{G_1} = 1\ A$, $I_{G_2} = 4\ A$ и $R_1 = R_2 = R_3 = R = 1\ \Omega$.

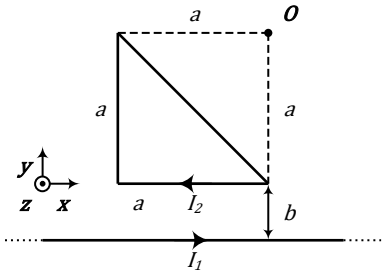
а) Применом теореме суперпозиције одредити јачину струје I_E и напон U_{AB}. [16 поена]

б) Одредити снагу напонског генератора E и снагу струјног генератора I_{G_1}. [4 поена]

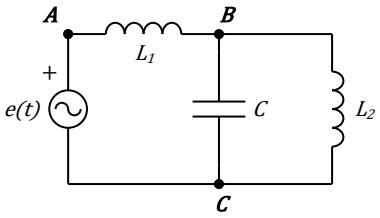


слика 2

3. Бесконачно дугачак проводник, кроз који протиче струја интензитета $I_1 = 2I$, и контура облика једнакокрако–правоуглог троугла дужине катета a, кроз коју протиче струја интензитета $I_2 = I$, налазе се у истој равни у ваздуху као на *слици 3*. Растојање између бесконачно дугачког проводника и ближе катете троугла је $b = \frac{a}{3}$. Одредити и нацртати резултујући вектор магнетне индукције у тачки O (*која чини квадрат са теменима троугла*). [20 поена]



слика 3



слика 4

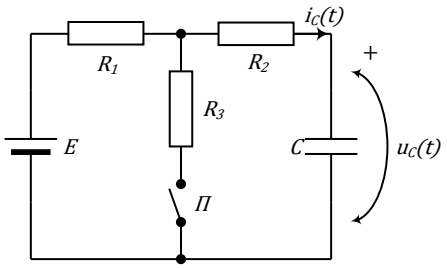
4. Коло на *слици 4* напаја се напоном тренутне вредности $e(t) = 20\sqrt{2}\sin(1000t + \pi)\ [V]$. Вредности елемената у колу су: $L_1 = 30\ mH$, $L_2 = 100\ mH$ и $C = 50\ \mu F$. Одредити:

а) Комплексну импедансу и комплексну адмитансу еквивалентног потрошача између тачака A и B; [6 поена]

б) Комплексну вредност напона генератора и струја у гранама кола, а затим их нацртати на фазорском дијаграму; [8 поена]

в) Активну, реактивну и привидну снагу еквивалентног потрошача; [6 поена]

5. За коло на *слици 5* познато је: E, $R_1 = R_3 = 2R$, $R_2 = 3R$ и C. Прекидач $П$ је отворен и у колу је успостављено стационарно стање. У тренутку $t = 0$ прекидач се затвара. Одредити:



слика 5

а) Изразе за тренутне вредности напона и струје кондензатора након затварања прекидача $П$ и нацртати одговарајуће временске дијаграме; [12 поена]

б) Напон на отпорнику R_2 у тренутку $t_1 = 4RC$; [4 поена]

в) Минималну и максималну вредност електростатичке енергије кондензатора. [4 поена]

РЕШЕЊА ПИСМЕНОГ ИСПИТА ИЗ ЕЛЕКТРОТЕХНИКЕ 14.02.2018.

1. $C_1 = C_2 = C = 10\ nF, C_3 = 6C = 60\ nF, E = 10\ V, r = 1\ \Omega, Q_{30} = 200\ nC$

а) $C_{12} = C_1 + C_2 = 10\ nF + 10\ nF = 20\ nF$

$C_{12} = \frac{Q_{12}}{U_{12}} \Rightarrow U_{12} = \frac{Q_{12}}{C_{12}} = \frac{\triangle q}{C_{12}}, C_3 = \frac{Q_3}{U_3} \Rightarrow U_3 = \frac{Q_3}{C_3} = \frac{\triangle q + Q_{30}}{C_3}$

$U_1 + U_2 = E \Rightarrow \frac{\triangle q}{C_{12}} + \frac{\triangle q + Q_{30}}{C_3} = E \Rightarrow \frac{\triangle q}{C_{12}} + \frac{\triangle q}{C_3} + \frac{Q_{30}}{C_3} = E \Rightarrow$

$\triangle q \left(\frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_3}\right) = E - \frac{Q_{30}}{C_3} \Rightarrow \boxed{\triangle q} = \frac{E - \frac{Q_{30}}{C_3}}{\frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_3}} = \frac{10\ V - \frac{200\ nC}{60\ nF}}{\frac{1}{20\ nF} + \frac{1}{60\ nF}} = \boxed{100\ nC}$

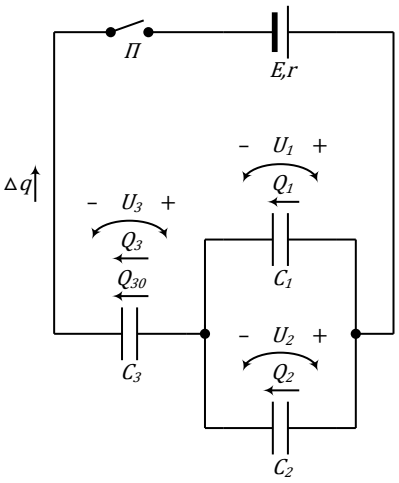
$\boxed{Q_3} = \triangle q + Q_{30} = 100\ nC + 200\ nC = \boxed{300\ nC}, U_3 = \frac{Q_3}{C_3} = \frac{300\ nC}{60\ nF} = \boxed{5\ V}$

$\boxed{U_{12}} = \frac{\triangle q}{C_{12}} = \frac{100\ nC}{20\ nF} = \boxed{5\ V}$ или $\boxed{U_{12}} = E - U_3 = 10\ V - 5\ V = \boxed{5\ V}$

$U_{12} = 5\ V \Rightarrow \boxed{U_1 = 5\ V} \wedge \boxed{U_2 = 5\ V}$

$C_1 = \frac{Q_1}{U_1} \Rightarrow \boxed{Q_1} = C_1 U_1 = 10\ nF \cdot 5\ V = \boxed{50\ nC}$

$C_2 = \frac{Q_2}{U_2} \Rightarrow \boxed{Q_2} = C_2 U_2 = 10\ nF \cdot 5\ V = \boxed{50\ nC}$



слика 1

б) $a = 10\ cm = 10 \cdot 10^{-2}\ m = 10^{-1}\ m, b = 20\ cm = 2 \cdot 10 \cdot 10^{-2}\ m = 2 \cdot 10^{-1}\ m, d = 1\ mm = 1 \cdot 10^{-3}\ m$

$S = ab = 2 \cdot 10^{-2}\ m^2, C_3 = \frac{\varepsilon S}{d} \Rightarrow \boxed{\varepsilon} = \frac{C_3 d}{S} = \frac{60 \cdot 10^{-9}\ F \cdot 10^{-3}\ m}{2 \cdot 10^{-2}\ m^2} = \boxed{30 \cdot 10^{-10}\ \frac{F}{m}}$

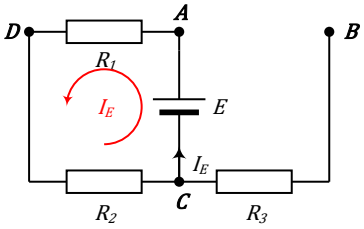
$U_3 = Kd \Rightarrow \boxed{K} = \frac{U_3}{d} = \frac{5\ V}{10^{-3}\ m} = \boxed{5 \cdot 10^3\ \frac{V}{m}}, \boxed{F} = \frac{1}{2} Q_3 K = \frac{1}{2} \cdot 300 \cdot 10^{-9} \cdot 5 \cdot 10^3 = \boxed{750 \cdot 10^{-6}\ N}$

2. $E = 10\ V, I_{G_1} = 1\ A, I_{G_2} = 4\ A, R_1 = R_2 = R_3 = R = 1\ \Omega$

генератор E:

$I_E = \frac{E}{R_1 + R_2} = 5\ A, U_{AB} = R_3 0 + E = 10\ V$

$\boxed{I_E(E) = 5\ A}, \boxed{U_{AB}(E) = 10\ V}$



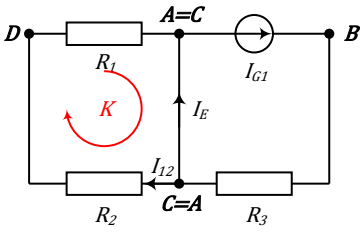
слика 2а

генератор I_{G_1}:

$2K3-K: -R_2I_{12}-R_1I_{12}=0 \Rightarrow I_{12}(R_1+R_2)=0 \Rightarrow I_{12}=0$

$1K3-C: I_{G_1}=\underbrace{I_{12}}_{0}+I_E \Rightarrow I_E=I_{G_1}=1\,A, U_{AB}=-R_3I_{G_1}=-1\,V$

$\boxed{I_E(I_{G_1})=1\,A}, \boxed{U_{AB}(I_{G_1})=-1\,V}$



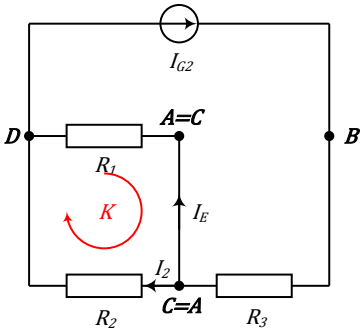
слика 2б

генератор I_{G_2}:

$2K3-K: -R_2I_1+R_1I_E=0 \Rightarrow R_2I_1=R_1I_E \Rightarrow I_1=I_E$

$1K3-C: I_{G_2}=I_1+I_E=2I_E \Rightarrow I_E=\frac{1}{2}I_{G_2}=2\,A, U_{AB}=-R_3I_{G_2}=-4\,V$

$\boxed{I_E(I_{G_2})=1\,A=2\,A}, \boxed{U_{AB}(I_{G_2})=-4\,V}$



слика 2в

суперпозиција:

$\boxed{I_E}=I_E(E)+I_E(I_{G_1})+I_E(I_{G_2})=\boxed{8\,A}$

$\boxed{U_{AB}}=U_{AB}(E)+U_{AB}(I_{G_1})+U_{AB}(I_{G_2})=\boxed{5\,V}$

б) $\boxed{P_E}=EI_E=\boxed{80\,W}, \boxed{P_{G_1}}=U_{BA}I_{G_1}=\boxed{-5\,W}$

3. $I_1=2I, I_2=I, b=\frac{a}{3}$

$\vec{B}_O=\vec{B}_{O_1}+\vec{B}_{O_2}+\vec{B}_{O_3}+\vec{B}_{O_4}$

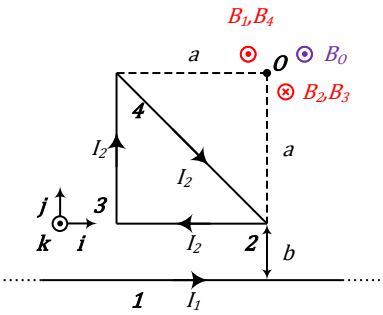
$\vec{B}_{O_1}=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1}\cdot\vec{k}, r_1=a+b=a+\frac{a}{3}=\frac{4}{3}a$

$\vec{B}_{O_1}=\frac{2\mu_0 I}{2\pi\frac{4}{3}a}\cdot\vec{k}=\frac{3\mu_0 I}{4\pi a}\cdot\vec{k}$

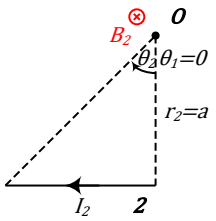
$\vec{B}_{O_2}=\frac{\mu_0 I_2}{4\pi r_2}(\sin\theta_2-\sin\theta_1)\cdot(-\vec{k})$

$r_2=a, \theta_2=45°, \theta_1=0°$

$\vec{B}_{O_2}=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(-\vec{k})=\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{8\pi a}\cdot(-\vec{k})$



слика 3а



слика 3б

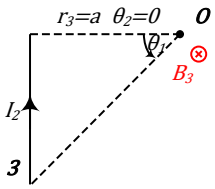
$\vec{B}_{O_3}=\frac{\mu_0 I_2}{4\pi r_3}(\sin\theta_2-\sin\theta_1)\cdot(-\vec{k}), r_2=a, \theta_2=0°, \theta_1=-45°$

$\vec{B}_{O_2}=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(-\vec{k})=\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{8\pi a}\cdot(-\vec{k})$

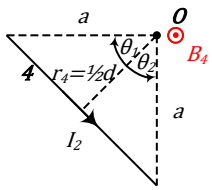
$\vec{B}_{O_4}=\frac{\mu_0 I_2}{4\pi r_4}(\sin\theta_2-\sin\theta_1)\cdot\vec{k}, r_2=\frac{1}{2}d=\frac{a\sqrt{2}}{2}, \theta_2=45°, \theta_1=-45°$

$\vec{B}_{O_2}=\frac{\mu_0 I}{4\pi\frac{a\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\vec{k}=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\cdot\vec{k}$

$\vec{B}_O=\frac{3\mu_0 I}{4\pi a}\cdot\vec{k}-2\cdot\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{8\pi a}\cdot\vec{k}+\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\cdot\vec{k}=\boxed{\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(5-\sqrt{2})\cdot\vec{k}}$



слика 3в



слика 3г

4. $e(t) = 20\sqrt{2}\sin(1000t + \pi)\ [V], L_1 = 30\ mH, L_2 = 100\ mH, C = 50\ \mu F$

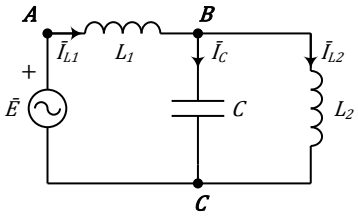
а) $\overline{Z}_{L_1} = jX_{L_1} = j\omega L_1 = j30\ [\Omega]$

$\overline{Z}_{L_2} = jX_{L_2} = j\omega L_2 = j100\ [\Omega]$

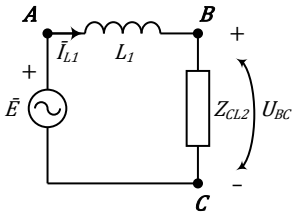
$\overline{Z}_C = jX_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j20\ [\Omega]$

$\overline{Z}_{CL_2} = \frac{\overline{Z}_C \cdot \overline{Z}_{L_2}}{\overline{Z}_C \cdot \overline{Z}_{L_2}} = -j25\ [\Omega]$

$\boxed{\overline{Z}_e} = \overline{Z}_{C_1} + \overline{Z}_{LC_2} = \boxed{j5\ [\Omega]}, \boxed{\overline{Y}_e} = \frac{1}{\overline{Z}_e} = \boxed{-j\frac{1}{5}\ [S]}$



слика 4а



слика 4б

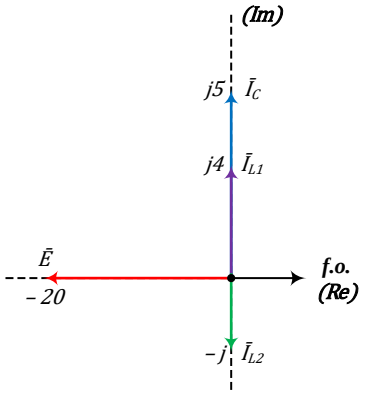
б) $E_m = 20\sqrt{2}\ V, E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = 20\ V, \omega = 1000\ \frac{rad}{s}, \theta = \pi\ rad$

$\overline{E} = E(\cos\theta + j\sin\theta) = -20\ [V], \boxed{\overline{I}_{L_1}} = \frac{\overline{E}}{\overline{Z}_{L_1} + \overline{Z}_{CL_2}} = \frac{\overline{E}}{\overline{Z}_e} = \boxed{j4\ [A]}$

$\overline{U}_{BC} = \overline{Z}_{CL_2}\overline{I}_{L_1} = \boxed{100\ [V]}, \overline{U}_{BC} = \overline{Z}_C\overline{I}_C \Rightarrow \boxed{\overline{I}_C} = \frac{\overline{U}_{BC}}{\overline{Z}_C} = \boxed{j5\ [A]}$

$\overline{U}_{BC} = \overline{Z}_{L_2}\overline{I}_{L_2} \Rightarrow \boxed{\overline{I}_{L_2}} = \frac{\overline{U}_{BC}}{\overline{Z}_{L_2}} = \boxed{-j\ [A]}$ или

$1КЗ - B: \overline{I}_{L_1} = \overline{I}_C + \overline{I}_{L_2} \Rightarrow \boxed{\overline{I}_{L_2}} = \overline{I}_{L_1} - \overline{I}_C = \boxed{-j\ [A]}$



слика 4в

в) $\overline{S}_E = \overline{U}\,\overline{I}^* = \overline{E}\,\overline{I}_{L_1}^* = -j80\ VA \Rightarrow P_E = \boxed{P_U = 0\ W}, Q_E = \boxed{Q_U = -80\ VAr}$

$\boxed{S_U} = \sqrt{P_U^2 + Q_U^2} = \boxed{80\ VA}$

5. $E, R_1 = R_3 = 2R, R_2 = 3R, C$

<u>П отворен (СС)</u>:

$u_C(t) = const, i_C(t) = 0$

$2КЗ - K: E - \underbrace{R_1\, i_C(t)}_{0} - \underbrace{R_2\, i_C(t)}_{0} - u_C(t) = 0$

$u_C(t) = E, t \le 0, \boxed{u_C(0) = E}$ *почетни услов*

<u>П затворен (ПП)</u>:

$1КЗ - A: i_1 = i_3 + i_C(t)\ (1)$

$2КЗ - K_1: E - R_1 i_1 - R_3 i_3 = 0\ (2)$

$2КЗ - K_2: R_3 i_3 - R_2 i_C(t) - u_C(t) = 0\ (3)$

$(2): R_1 i_1 + R_3 i_3 = E$

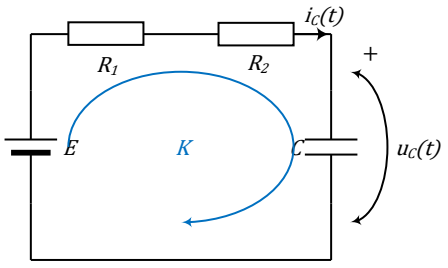
$(1) \to (2): 2R\big(i_3 + i_C(t)\big) + 2Ri_3 = E \Rightarrow 2Ri_3 + 2Ri_C(t) + 2Ri_3 = E$

$(2): 4Ri_3 + 2Ri_C(t) = E$

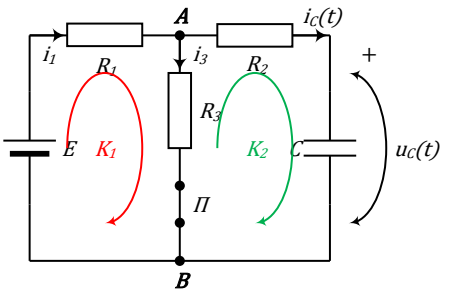
$(3): R_3 i_3 = R_2 i_C(t) + u_C(t) \Rightarrow i_2 = \frac{3Ri_C(t) + u_C(t)}{2R}$

$(3) \to (2): 4R\frac{3Ri_C(t) + u_C(t)}{2R} + 2Ri_C(t) = E$

$6Ri_C(t) + 2u_C(t) + 2Ri_C(t) = E \Rightarrow 8Ri_C(t) + 2u_C(t) = E \Rightarrow$



слика 5а

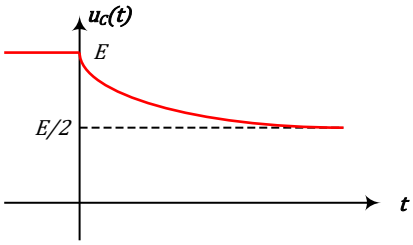


слига 5б

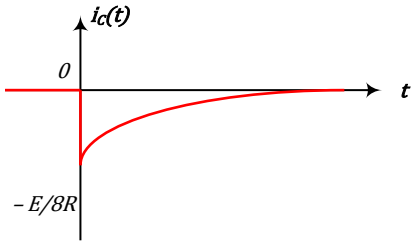
$8RC\frac{du_C(t)}{dt} + 2u_C(t) = E \Big| : 8RC \Rightarrow \frac{du_C(t)}{dt} + \underbrace{\frac{1}{4RC}}_{\alpha} u_C(t) = \underbrace{\frac{E}{8RC}}_{\beta}, u_C(t) = \frac{\beta}{\alpha} + Ke^{-\alpha t}$

$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{E}{2}, K = ?, t = 0, u_C(0) = \frac{\beta}{\alpha} + K \Rightarrow E = \frac{E}{2} + K \Rightarrow K = \frac{E}{2}, \boxed{u_C(t) = \frac{E}{2} + \frac{E}{2}e^{-\frac{1}{4RC}t}, t \ge 0}$

$i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} = C\frac{d}{dt}\left(\frac{E}{2} + \frac{E}{2}e^{-\frac{1}{4RC}t}\right) \Rightarrow \boxed{i_C(t) = -\frac{E}{8R}e^{-\frac{1}{4RC}t}, t \ge 0}$



слика 5в



слика 5 г

б) $i_C(t_1) = -\frac{E}{8R}e^{-\frac{1}{4RC}4RC} = -\frac{E}{8R}e^{-1}$, $\boxed{u_{R_2}(t_1)} = R_2 i_C(t_1) = \boxed{-\frac{3}{8}Ee^{-1}}$

в) $W_C(t) = \frac{1}{2}Cu_C^2(t)$

$\boxed{W_{C_{min}}(t)} = \frac{1}{2}C\left(\frac{E}{2}\right)^2 = \boxed{\frac{CE^2}{8}, t \to \infty}$, $\boxed{W_{C_{max}}(t)} = \frac{1}{2}C(E)^2 = \boxed{\frac{CE^2}{2}, t \to \infty}$